Examen de admisión (Métodos Matemáticos)

Maestría en Ciencias Físicas, FCFM-UNACH

Jueves 25 de Agosto del 2022, 11:30-13:30

Problema 1

La expansión en series de Fourier de una función $f(x)$ es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) + b_r \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \right]. \tag{1}$$

Donde los coeficientes de la serie se determinan mediante

$$a_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx, \tag{2}$$

$$b_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx \tag{3}$$

La serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $0 < x \leq 2$ tiene como coeficientes (con $L = 4$)

$$a_r = \frac{16}{\pi^2 r^2}(-1)^r \tag{4}$$

Construir la serie de Fourier de $f(x)$ y utilizar el resultado para determinar la serie de Fourier de $g(x) = x^3$, en el mismo intervalo.

Problema 2

Resolver la ecuación diferencial $xy' + 3x + y = 0$ y hacer una representación gráfica de la familia de soluciones.

Problema 3

Demostrar que i^{-2i} es un número real igual a

$$e^{(\pi + 4n\pi)}.$$

Problema 4

Construir una matriz unitaria U con los eigenvectores de la matriz Hermitiana:

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 10 & 3i \\ -3i & 2 \end{pmatrix},$$

tal que $\mathsf{U}^\dagger \mathsf{H} \mathsf{U} = \Lambda$, donde Λ es una matriz diagonal real. La matriz $\mathsf{U}^\dagger$ es la adjunta de la matriz U y se cumple que $\mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{I}$.

Problema 5

Representar gráficamente el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (1 - y)\hat{\imath} + (x - 1)\hat{\jmath}$. Y determinar la expresión analítica del campo que se muestra en la Figura 1.

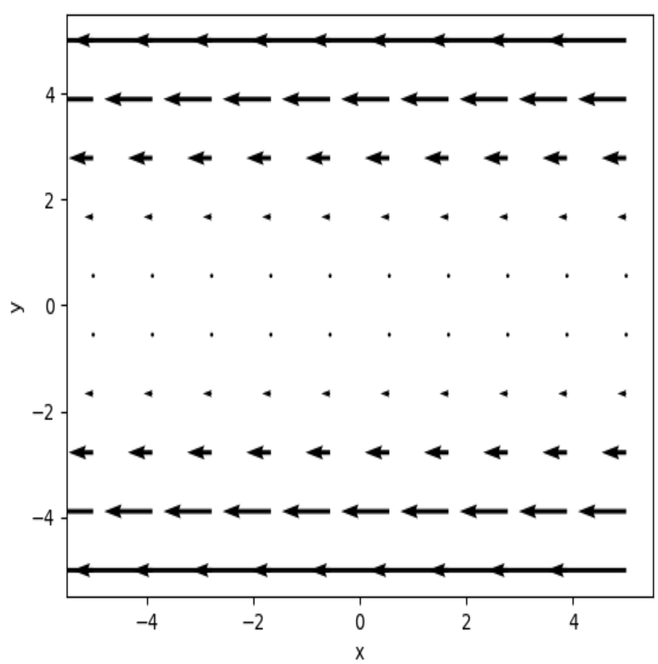

Figure 1: